Intensivos 2018

MA1112 - Matemáticas II

Solución Parcial 2 (30 %)

Turno 4-5

Pregunta 1

Calcule los siguientes límites:

a) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to e^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}$

b) (2 ptos.) $\lim\limits_{x\to 0^-} (\cosh x - 1)^{\text{csch} x}$

Solución

a) Haciendo la sustitución ingenua (S.I.) obtenemos que

$$\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}} = [1^\infty]$$

El cual es una indeterminación del tipo exponencial. Así que aplicamos logaritmo natural y exponencial antes de tomar el límite de modo que queda:

$$\lim_{x\to e^+} e^{\ln\left((\ln x)^{\frac{1}{x-e}}\right)} = \lim_{x\to e^+} e^{\left(\frac{1}{x-e}\ln(\ln x)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to e^+}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x-e}\right]}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de la continuidad de la función exponencial. Ahora, trabajaremos con el límite, cuya sustitución ingenua conlleva a una indeterminación del tipo $[\frac{0}{0}]$. Así que aplicamos la regla de L'Hopital, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e^+}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x-e}\right] &= \lim\left[\frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{1}\right] \\
&= \lim\left[\frac{1}{x\ln x}\right] \quad \text{(Haciendo S.I.)} \\
&= \frac{1}{e\ln e} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Sustituyendo arriba, obtenemos finalmente que

$$\lim_{x \to e^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}} = \boxed{e^{\frac{1}{e}}}$$

b) Haciendo S.I. obtenemos:

$$\lim_{x \to 0^-} (\cosh x - 1)^{\operatorname{csch} x} = \big(\cosh(0^-) - 1\big)^{\operatorname{csch}(0^-)} = 0^{-\infty} = \boxed{\infty}$$

Pregunta 2

(8 ptos. c/u) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \pi^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 4\ln x + 6)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$

Solución

a) Aplicamos integración por partes y hacemos:

$$\begin{array}{rcl} u = \pi^x & \Rightarrow & du = \pi^x \ln \pi dx \\ v = -\cos x & \Leftarrow & dv = \operatorname{sen} x dx \end{array}$$

De modo que la integral queda:

$$\int \pi^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\pi^x \cos x + \ln \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x$$

Aplicamos integración por partes de nuevo haciendo:

$$\begin{array}{rcl} u = \pi^x & \Rightarrow & du = \pi^x \ln \pi dx \\ v = \operatorname{sen} x & \Leftarrow & dv = \cos x dx \end{array}$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} \int \pi^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= -\pi^x \cos x + \ln \pi \int \pi^x \cos x \mathrm{d}x \\ &= -\pi^x \cos x + \ln \pi \left(\pi^x \operatorname{sen} x - \ln \pi \int \pi^x \operatorname{sen} x \mathrm{d}x \right) \\ &= -\pi^x \cos x + \ln \pi \; \pi^x \operatorname{sen} x - \ln^2 \pi \int \pi^x \operatorname{sen} x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Es una integral cíclica, por lo que pasamos la expresión $-\ln^2\pi\int\pi^x \operatorname{sen} x\mathrm{d}x$ sumando al otro lado de la igualdad. Obteniendo:

$$
\begin{aligned}
\int \pi^x \operatorname{sen} x\mathrm{d}x + \ln^2\pi\int\pi^x \operatorname{sen} x\mathrm{d}x &= -\pi^x\cos x + \ln\pi\ \pi^x \operatorname{sen} x\\
(1+\ln^2\pi)\int\pi^x\cos x\mathrm{d}x &= \ln\pi\ \pi^x\operatorname{sen} x - \pi^x\cos x\\
\int\pi^x\cos x\mathrm{d}x &= \frac{1}{1+\ln^2\pi}(\ln\pi\ \pi^x\operatorname{sen} x-\pi^x\cos x)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\int\pi^x\cos x\mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi^x(\ln\pi\operatorname{sen} x-\cos x)}{1+\ln^2\pi}+C}$$

b) Hacemos el cambio $\boxed{u=\ln x}$, entonces $\boxed{du=\frac{dx}{x}}$.

Sustituyendo en la integral, obtenemos que:

$$\int\frac{\ln x}{x(\ln^2 x-4\ln x+6)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u}{(u^2-4u+4+2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u=\int\frac{u}{((u-2)^2+(\sqrt{2})^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

Hacemos el cambio trigonométrico $\boxed{u-2=\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta}$ y así $\boxed{u=\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2}$ y $\boxed{du=\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}$. Sustituimos en la integral y queda:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{u}{((u-2)^2+(\sqrt{2})^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u &= \int\frac{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2)}{\left((\sqrt{2})^2\operatorname{tg}^2\theta+(\sqrt{2})^2\right)^{3/2}}(\sqrt{2}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&= \int\frac{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2)}{((\sqrt{2})^{\cancel{2}})^{3/\cancel{2}}(\operatorname{tg}^2\theta+1)^{3/2}}(\sqrt{2}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&= \int\frac{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2)}{2\cancel{\sqrt{2}}(\sec^{\cancel{2}}\theta)^{3/\cancel{2}}}(\cancel{\sqrt{2}}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2)}{(\sec\theta)^{\cancel{3}}}(\cancel{\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta)\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta+2)}{\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

Dividimos la integral y tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta + 2)}{\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sec\theta}\mathrm{d}\theta + \int \frac{1}{\sec\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta + \int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + C
\end{aligned}$$

Luego, si $u - 2 = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$, entonces $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{u-2}{\sqrt{2}}$. De aquí que $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{CO}{h} = \frac{u-2}{\sqrt{(u-2)^2+2}}$ y $\cos\theta = \frac{CA}{h} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(u-2)^2+2}}$.
Sustituyendo arriba y devolviendo los cambios obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 4\ln x + 6)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + C \\
&= \frac{u-2}{\sqrt{(u-2)^2+2}} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{(u-2)^2+2}} + C \\
&= \frac{u-2-1}{\sqrt{(u-2)^2+2}} + C \\
&= \frac{u-3}{\sqrt{u^2-4u+6}} + C \\
&= \boxed{\frac{\ln x - 3}{\sqrt{\ln^2 x - 4\ln x + 6}} + C}
\end{aligned}$$

Pregunta 3

(4 ptos.) Resuelva $\displaystyle\int \frac{\mathrm{csch}x\,\mathrm{ctgh}^5 x}{(\mathrm{ctgh}^2 x - 1)^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x$

Solución

Reescribimos la integral:

$$\int \frac{\mathrm{csch}x\,\mathrm{ctgh}^5 x}{(\mathrm{ctgh}^2 x - 1)^{\frac{1}{6}}}\mathrm{d}x = \int \frac{(\mathrm{ctgh}^2 x)^2\,\mathrm{csch}x\,\mathrm{ctgh}x}{(\mathrm{csch}^{\cancel{2}} x)^{\frac{1}{\cancel{6}}}}\mathrm{d}x = \int \frac{(\mathrm{csch}^2 x + 1)^2\mathrm{csch}x\,\mathrm{ctgh}x}{(\mathrm{csch}x)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio $\boxed{u = \mathrm{csch}x}$, y así $\boxed{-du = \mathrm{csch}x\,\mathrm{ctgh}x dx}$. La integral queda:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\mathrm{csch}^2 x+1)^2 \mathrm{csch} x \,\mathrm{ctgh} x}{(\mathrm{csch} x)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x &= \int \frac{(u^2+1)^2}{u^{1/3}}(-\mathrm{d}u) \\
&= -\int \frac{(u^4+2u^2+1)}{u^{1/3}} \mathrm{d}u \\
&= -\int (u^{11/3}+2u^{5/3}+u^{-1/3}) \mathrm{d}u \\
&= -\left(\frac{3}{14}u^{14/3}+\cancel{2}\frac{3}{\cancel{8}}u^{8/3}+\frac{3}{2}u^{2/3}\right)+C \\
&= -\frac{3}{14}u^{14/3}-\frac{3}{4}u^{8/3}-\frac{3}{2}u^{2/3}+C
\end{aligned}$$

Finalmente, devolviendo el cambio tenemos que

$$\int \frac{\mathrm{csch} x \,\mathrm{ctgh}^5 x}{(\mathrm{ctgh}^2 x-1)^{\frac{1}{6}}} \mathrm{d}x = \boxed{-3\left(\frac{(\mathrm{csch} x)^{14/3}}{14}+\frac{(\mathrm{csch} x)^{8/3}}{4}+\frac{(\mathrm{csch} x)^{2/3}}{2}\right)+C}$$

Pregunta 4

(4 ptos.) Derive la función

$$f(x) = \mathrm{arctgh}(\operatorname{sen} x) + \cos(x^x) - \log_{25} e^{2x}$$

Solución

Sean $y = f(x)$, $y_1 = \mathrm{arctgh}(\operatorname{sen} x)$, $y_2 = \cos(x^x)$ y $y_3 = \log_{25} e^{2x}$. Entonces, buscamos $f'(x) = y' = (y_1 + y_2 - y_3)' = y_1' + y_2' - y_3'$.

Cabe destacar que para derivar $f(x)$ es necesario que, por y_1, $\operatorname{sen} x$ pertenezca al intervalo $(-1,1)$ (por el dominio de $\mathrm{arctgh} x$); y que, por y_2, x sea positivo (por el dominio de x^x). Es decir, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$. Ahora, teniendo este dominio en cuenta calculamos cada derivada por separado y luego unimos los resultados.

$$y_1' = (\mathrm{arctgh}(\operatorname{sen} x))' = \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}(\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cos x = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y_3' = (\log_{25} e^{2x})' = \frac{1}{e^{2x}\ \ln(25)}(e^{2x})' = \frac{1}{\cancel{e^{2x}}\ln(5^2)}2\cancel{e^{2x}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}$$

Para y_2' usaremos derivación logarítmica. Sea $y_4 = x^x$, entonces $y_2 = \cos(y_4)$ y $y_2' = -\operatorname{sen}(y_4)y_4'$.

$$
\begin{aligned}
y_4 &= x^x \\
\ln(y_4) &= \ln(x^x) \\
\ln(y_4) &= x\ln(x) \quad \text{(Derivamos implícitamente)} \\
\frac{1}{y_4}y_4' &= \ln x + x\frac{1}{x} \\
y_4' &= y_4\,[\ln x + 1] \\
y_4' &= x^x\,[\ln x + 1]
\end{aligned}
$$

Así, $y_2' = -\operatorname{sen}(y_4)y_4' = -x^x\,(\ln x + 1)\operatorname{sen}(x^x)$

Sustituyendo todo esto arriba, obtenemos finalmente que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= y_1' + y_2' - y_3' \\
&= \boxed{\sec x - x^x\,(\ln x + 1)\operatorname{sen}(x^x) - \frac{1}{\ln 5}}
\end{aligned}
$$

(Siempre que $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$)